МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА В УПРАВЛЕНИИ БИЗНЕС-ПРОЦЕССАМИ

• ИЗДАТЕЛЬСТВО ГОУ ВПО ТГТУ •

УДК 330.46
ББК 65.050
М34

Р е ц е н з е н т

Доктор физико-математических наук, профессор ГОУ ВПО ТГТУ
С.М. Дзюба

С о с т а в и т е л и:

В.Н. Дякин, *С.Б. Путин*, *С.А. Скворцов*, *С.С. Толстошеин*

М34 Математическая экономика в управлении бизнес-процессами : метод. указания / сост. : В.Н. Дякин, С.Б. Путин, С.А. Скворцов, С.С. Толстошеин. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2011. – 32 с. – 100 экз.

Представлен материал, направленный на закрепление и расширение теоретических и практических знаний по специальности «Прикладная информатика в экономике». Содержат теоретические сведения, задания к контрольным работам и порядок их выполнения.

Предназначены для изучения студентами специальности 080801 «Прикладная информатика в экономике» и направления 230700 «Прикладная информатика» курса «Математическая экономика».

УДК 330.46
ББК 65.050

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА В УПРАВЛЕНИИ БИЗНЕС-ПРОЦЕССАМИ

Методические указания
для студентов дневной и заочной формы обучения
специальности 080801 и направления 230700

Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2011

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА В УПРАВЛЕНИИ БИЗНЕС-ПРОЦЕССАМИ

Методические указания

С о с т а в и т е л и:

ДЯКИН Вадим Николаевич,
ПУТИН Сергей Борисович,
СКВОРЦОВ Сергей Александрович,
ТОЛСТОШЕИН Сергей Серафимович

Редактор И.В. К а л и с т р а т о в а
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Р ы ж к о в а

Подписано в печать 11.01.2011.
Формат 60 × 84/16. 1,86 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 11

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Предметом изучения дисциплины «Математическая экономика» являются математические модели микро- и макроэкономики, являющиеся средством для поддержки принятия экономических решений потребителями, производителями или отраслями экономики страны.

Полученные в рамках данного курса знания и навыки могут быть использованы при обосновании принятия решений потребителями и производителями товаров и услуг, для более чёткого понимания макроэкономических процессов страны и мира.

МИКРОЭКОНОМИКА

1. МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

1.1. Пространство товаров, цены, бюджетное множество потребителя

Под товаром понимается некоторое благо или услуга, поступившие в продажу в определённое время и в определённом месте.

Будем считать, что имеется n различных товаров, количество i-го товара обозначается x_i. Тогда некоторый набор товаров будет обозначаться $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и представлять собой упорядоченный набор из n чисел, т.е. n-мерный вектор-столбец. Рассматриваются, как правило, только неотрицательные количества товаров, так что $x_i \geq 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$ или $X \geq 0$. Множество всех наборов товаров называется пространством товаров и будет обозначаться как T. Это множество называется пространством, потому что в нём можно сложить любые два набора и умножить любой набор товаров на любое неотрицательное число. Возможность умножения набора товаров на любое неотрицательное число отражает предположение о безграничной делимости и умножении товаров (т.е. товары устроены наподобие сахарного песка, а не авианосцев). Набор товаров можно трактовать, как корзину, в которой лежат эти товары в соответствующем количестве. Аналогично интерпретируются и операции с набором товаров.

Предполагается, что каждый товар имеет цену. Все цены строго положительны. Пусть цена единицы i-го товара есть p_i, тогда $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ есть вектор-строка цен.

Для набора товаров X и вектора цен P их скалярное произведение $PX = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$ есть число, называемое *ценой набора X* или его стоимостью, и будет обозначаться $C(X)$.

Отношение равной стоимости разбивает всё пространство товаров на непересекающиеся классы (для случаев двух товаров отрезок).

Пусть вектор цен есть P. Зафиксируем некоторую денежную сумму Q и назовём её доходом.

Множество наборов товаров не более Q при данных ценах P называется бюджетным множеством B; множество наборов товаров стоимости равной Q называется границей G этого бюджетного множества.

Бюджетное множество и его граница зависят от цен и доходов, так что точнее их было бы обозначить $B(P, Q)$ и $G(P, Q)$:

$$B(P, Q) = \{(x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \geq 0,\ p_1 x_1 + ... + p_n x_n \leq Q\}$$
$$G(P, Q) = \{(x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \geq 0,\ p_1 x_1 + ... + p_n x_n = Q\}$$

При увеличении Q граница бюджетного множества движется в направлении вектора цен. При изменении цен, об изменении бюджетного множества можно судить по движению точек границы.

Доказывается, что бюджетное множество выпукло, ограничено и замкнуто.

Граница бюджетного множества также есть выпуклое, ограниченное и замкнутое множество.

1.2. Индивид-потребитель и система его предпочтений

Одним из основных элементов экономики является домашнее хозяйство, определяемое как некоторая группа индивидов, выступающая как единое целое, распределяющая свой доход на покупку и потребление товаров и услуг. Участник экономики, рассматриваемый с этой точки зрения, называется *потребителем*. Проблема рационального поведения заключается в решении вопроса о том, какие количества товаров или услуг он хочет и может приобрести при заданных ценах и его доходе.

Специально отметим, что существуют разные точки зрения на роль *индивидов-потребителей*. В неоклассической экономической теории эта роль является основной, определяющей. Вся остальная экономика строится из желаний и потребностей такого индивида.

Выбор потребителем некоторого рода товаров во многом зависит от его вкусов и желаний. Потребитель различает наборы товаров, предпочитая один набор товаров другому. Запись $X \preceq Y$ означает, что потребитель предпочитает набор X набору Y либо не делает между ними различий. Такое отношение называется *слабым предпочтением*. Оно формирует ещё два отношения: отношение равноценности (или безразличия) – $X \sim У$, если и только если $X \preceq Y$ и $Y \preceq X$, и отношение предпочтения (или строгого предпочтения) – $X \prec Y$, если и только если $X \preceq Y$ и не верно, что $X \sim Y$.

Отношение является рефлексивным, если $X \preceq X$ для всякого X; симметричным, если $X \preceq Y$ влечёт, что и $Y \preceq X$; транзитным, если $X \preceq Y$ и $Y \preceq Z$ влечёт $X \preceq X$; совершенным (или полным), если для любых двух наборов X, Y либо $X \preceq Y$, либо $Y \preceq X$.

Аксиомы:

1) отношение слабого предпочтения рефлексивно, транзитивно и совершенно;

2) отношение равноценности рефлексивно, симметрично и транзитивно;

3) отношение предпочтения транзитивно;

4) для любого $X \in T$ множество предпочтительности $P_X = \{Y : X \preceq Y\}$ выпукло;

5) каждый товар желателен для индивида: если $X \leq Y$, то и $X \preceq Y$, а если к тому же $X \neq У$ (т.е. $x_i < y_i$ для некоторого i), то $X \prec Y$.

Отношение равноценности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Любое отношение, обладающее этими тремя свойствами, называется *эквивалентностью*. Любая эквивалентность на множестве разбивает это множество на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности*. Итак, отношение равноценности является эквивалентностью и разбивает пространство товаров на непересекающиеся подмножества, называемые классами равноценности (или безразличия), а в случае двух или трёх товаров эти классы называются *линиями* или *поверхностями равноценности* (или *безразличия*). Каждый отдельный класс равноценностей состоит из наборов товаров, одинаково привлекательных для потребителя, – он не отдаёт предпочтение ни одному из этих наборов. При этом каждый набор из пространства товаров попадает в какой-нибудь из классов равноценности, именно в тот, где собраны наборы, одинаково ценные с ним (для данного индивида).

1.3. Функция полезности и её свойства

Система предпочтений индивида указывает, какой из двух наборов предпочтительнее для него. Во многих случаях, однако, весьма желательно и удобно оценивать привлекательность набора товаров количественно, т.е. приписать каждому набору X из пространства товаров T какое-то число $u(X)$. Получается функция u: $T \to R$. Главное требование к такой функции, чтобы она отражала отношение (слабого) предпочтения на T, т.е. удовлетворяла условиям:

$u(X) \leq u(Y)$, если и только если $X \preceq Y$;

$u(X) = u(Y)$, если и только если $X \sim Y$, значит и

$u(X) < u(Y)$, если и только если $X \prec Y$.

Такая функция называется *функцией полезности*. Видно, что функция полезности постоянна на каждом классе равноценности, так что её наглядно и вполне правильно представлять себе как функцию, «пересчитывающую» классы равноценности в сторону всё большего предпочтения наборов товаров.

Скажем, что система предпочтений непрерывна, если для всякого $X \in T$ множество предпочтительности $P_X = \{Y : X \preceq Y\}$ и множество непредпочтительности $N_X = \{Z : Z \preceq X\}$ замкнуты. Пересечение этих двух множеств есть класс равноценности.

Доказано, что если система предпочтений непрерывна, то существует непрерывная функция полезности.

Свойство $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(X) > 0,\ i = 1, \ldots, n$ означает, что предельная полезность каждого товара положительна, т.е. уже имея некоторое количество товара x_i, потребитель всё равно желает получить ещё данный товар.

Свойство $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(X) < 0,\ i = 1, \ldots, n$ означает, что с ростом потребления предельная полезность каждого товара уменьшается.

Свойство $\lim\limits_{x_i \to 0} \left(\Delta u / \Delta x_i\right) = \infty$ показывает, что при полном отсутствии в наборе товара i-го вида даже небольшое его количество даёт практически бесконечный прирост полезности.

Свойство $\lim\limits_{x_i \to \infty} \left(\Delta u / \Delta x_i\right) = 0$ показывает, что при полном насыщении в потреблении товара i-го вида дополнительное увеличении его количества в наборе уже не даёт прироста полезности.

Один из примеров таких функций, неоклассическая функция полезности, имеет следующий вид:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta},\ \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1\,.$$

Соотношение $M_j^k = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \left| \left(\Delta x_k / \Delta x_j\right) \right|$ называется *предельной нормой замещения* j-го товара k-м.

В экономике гораздо удобнее работать с относительными величинами, показывающими изменения, например, в процентах. Такой подход приводит к понятию эластичности (или коэффициента) замещения товара x товаром y:

$$E_x^y = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \left(\Delta y / y\right) / \left(\Delta x / x\right) \right|\,.$$

Смысл эластичности таков: один процент уменьшения товара x компенсируется увеличением на E_x^y процентов товара y. Ясно, что $E_x^y = M_x^y / (y / x)$.

1.4. Постановка задачи оптимизации выбора потребителя

Потребитель, имея определённый доход, желает его потратить с максимальной полезностью. Польза понимается в смысле системы его предпочтений или его функции полезности. Это приводит к следующей задаче математического программирования.

Найти набор товаров $X = (x_1, ..., x_n) \geq 0$, максимизизирующий функцию полезности $u(x_1, ..., x_n)$ при выполнении бюджетного ограничения $p_1x_1 + ... + p_nx_n \leq Q$.

Рассматриваемую задачу можно сформулировать более кратко: $u(X) \to \max$, $PX \leq Q$, $X \geq 0$ или даже так: $u(X) \to \max$, $X \in B(P, Q)$. В случае двух товаров это можно изобразить графически (рис. 1.1).

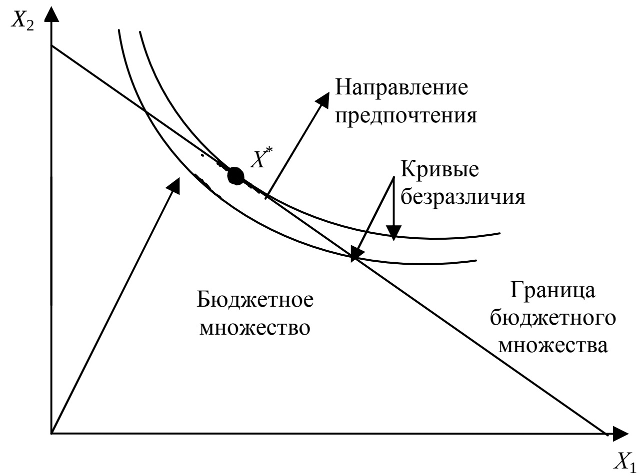

Рис. 1.1. Задача выбора потребителя

Доказывается, что решение задачи выбора потребителя существует, и любая точка максимума лежит на границе бюджетного множества.

При строгой вогнутости функции полезности существует в бюджетном множестве единственная точка её максимума. Таким образом, у потребителя даже нет выбора того, как с наибольшей пользой потратить свои деньги, так как существует единственный набор товаров, максимизирующий полезность. Эта единственная точка максимума называется *точкой спроса*, или просто *спросом потребителя*. Будем обозначать эту точку X^*.

Изучим точку спроса. Доказано только её существование, единственность и то, что она обязана лежать на границе G бюджетного множества. Таким образом, задача потребителя сводится к следующей задаче:

$$u(X) \to \max,\ X \in G \ \text{ или } u(X) \to \max,\ PX = Q.$$

Эту задачу можно решить с помощью множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа $L(X, \lambda) = u(X) + \lambda(Q - PX)$, найдём частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial X} - \lambda P = 0, \\ Q - PX = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial X} = \lambda P, \\ X \in G. \end{cases}$$

Получаем следующий вывод: точка спроса лежит на границе бюджетного множества и характеризуется тем, что в ней вектор предельных полезностей пропорционален вектору цен. Кроме того, в точке спроса отношение предельной полезности товара к его цене есть величина постоянная:

$$(\partial u / \partial x_i) / p_i = \lambda^*, \; i = 1, ..., n. \tag{1.1}$$

Или, другими словами: в точке спроса предельная норма замещения j-го товара i-м равна обратному отношению цен.

Далее, соотношение (1.1) показывает, что предельная полезность товара в точке спроса, приходящаяся на одну единицу его цены, т.е. на одну денежную единицу, одна и та же для всех товаров. Другими словами, оптимальный множитель Лагранжа λ^*, равный отношению предельной полезности к цене, измеряется в полезности единицы любого товара, делённой на цену этого товара, что сводится к полезности на рубль. Следовательно, λ^* необходимо интерпретировать как предельную полезность добавочного дохода $\partial u^* / \partial Q$, которая называется иногда *предельной полезностью денег*.

Итак, если функция полезности строго вогнута и удовлетворяет некоторым условиям дифференцируемости, а все цены P строго положительны, то при любом данном доходе Q задача определения набора товаров, который можно купить при этом доходе и имеющий наибольшую полезность, имеет единственное решение.

Это решение X^* называется *точкой спроса*. Как легко видеть, точка спроса X^* зависит от цен P и дохода Q (поскольку здесь рассматривается данный, конкретный потребитель, то его функция полезности считается неизменной). Итак, точка спроса есть функция цен и дохода. Эта функция называется *функцией спроса*.

Функция спроса – это вектор-функция своих $n + 1$ аргументов: n цен $p_1, ..., p_n$ и дохода Q. Рассматривая компоненты вектора X^*, т.е. количества товаров x_i^*, можно сказать, что функция спроса – это набор n функций:

$$\begin{aligned} &x_1^* = x_1^*(p_1, ..., p_n, Q); \\ &\vdots \\ &x_n^* = x_n^*(p_1, ..., p_n, Q). \end{aligned}$$

Функции $x_1^* = x_1^*(p_1, ..., p_n, Q)$ – это уже обычные функции от $n + 1$ переменных: n цен p_1, ..., p_n и дохода Q. Они называются *функциями спроса соответствующих товаров*.

1.5. Уравнение Слуцкого

В исследовании функций спроса и, вообще, в теории потребления основополагающую роль играет уравнение Слуцкого:

$$\partial X^* / \partial p_n = (\partial X^* / \partial p_n)_{\text{comp}} - (\partial X^* / \partial Q) x_n^* .$$

В левой части уравнения стоит частная производная от функции спроса X^* по цене n-го товара. В роли n-го товара может выступить любой товар, цена которого меняется. Итак, левая часть показывает отклик точки спроса на изменение цены n-го товара при неизменных остальных ценах и доходе.

Просто понять и вычитаемое $(\partial X^* / \partial Q) x_n^*$. Ведь $\partial X^* / \partial Q$ – это отклик, изменение точки спроса на изменение дохода Q, x_n^* – это величина спроса на n-й товар.

Но что такое $(\partial X^* / \partial p_n)_{\text{comp}}$? При ценах P и доходе Q точка спроса была X^* и обеспечивала полезность u^*. При изменении цены n-го товара p_n на Δp_n при прежних остальных ценах и доходе точка спроса изменится, изменится и соответствующая максимальная полезность. Например, при увеличении цены p_n новое значение максимальной полезности станет меньше. Изменим доход так, чтобы значение максимальной полезности, даваемое новой точкой спроса X', осталось неизменным. Теперь составим отношение $\Delta X^* / \Delta p_n$, где $\Delta X^* = X' - X^*$, и, переходя к пределу в этом отношении при $\Delta p_n \to 0$, получим $(\partial X^* / \partial p_n)_{\text{comp}}$. Геометрически это соответствует тому, что при изменении цены p_n мы изменяем доход так, чтобы остаться на той же линии полезности, и получаем новую точку спроса X' (рис. 1.2).

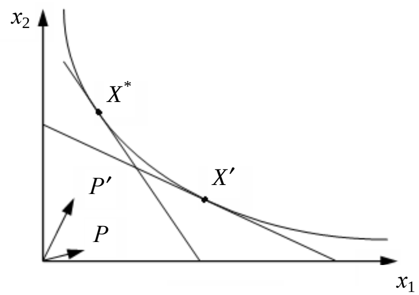

Рис. 1.2. Изменение точки спроса при компенсации дохода

Остановимся далее на отдельных моментах содержательного смысла уравнения Слуцкого.

При решении задачи оптимизации $u(X) \to \max$, $PX \le Q$, $X \ge 0$ с помощью множителей Лагранжа были получены следующие условия на точку максимума (X^*, λ^*):

$$\begin{cases} PX^* = Q, & (1.2) \\ \partial u / \partial X \Big|_{X = X^*} = \lambda^* P. & (1.3) \end{cases}$$

Функция полезности зависит от набора товаров, т.е. $u = u(X)$. Значит, $du = (\partial u/\partial X)\, dX$. Учитывая (1.3), получаем $du|_{X=X^*} = \lambda^* PdX$. Следовательно, чтобы $du = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $PdX = 0$. Но как же для этого должен измениться доход?

Из (1.2) имеем $dQ = PdX^* + X^* dP$, и поскольку $P \cdot dX = 0$, то $dQ = X^* \cdot dP$.

Итак, имеем следующие соотношения:

$$P \cdot dX = 0 \leftrightarrow du = 0,\ \ u = \text{const}; \tag{1.4}$$

и

$$X^* \cdot dP = dQ, \tag{1.5}$$

– требуемое для компенсации изменение дохода.

При выводе уравнения Слуцкого получаются также следующие дифференциальные соотношения (свойства):

$$(\partial x_n^* / \partial p_n)_{\text{comp}} < 0\,; \tag{1.6}$$

$$(\partial X^* / \partial Q) P = 1\,; \tag{1.7}$$

$$(\partial X^* / \partial p_n)_{\text{comp}} P = 0\,. \tag{1.8}$$

Каков экономический смысл соотношений (1.4 – 1.8)?

Соотношение (1.4) связывает старые цены с приращениями товаров. Из него следует, в частности, что приращения товаров носят сложный характер: количество некоторых товаров увеличивается, других уменьшается.

Соотношение (1.5) однозначно показывает, что при увеличении цен компенсация дохода имеет положительный характер, а при уменьшении цен доход также надо уменьшать.

Соотношение (1.6) показывает, что при повышении цены товара его потребление уменьшается даже при компенсации дохода.

Назовём n-й товар ценным, если $(\partial x_n^* / \partial Q) > 0$, т.е. если при увеличении дохода спрос на этот товар также увеличивается, в противном случае имеем товар малоценный. Соотношение (1.7) теперь показывает существование ценных товаров, так как все $\partial x_i^* / \partial Q$ не могут быть отрицательными (так как $P > 0$).

Предположим, что n-й товар является ценным и рассмотрим для него уравнение Слуцкого: $\partial x_n^* / \partial p_n = (\partial x_n^* / \partial p_n)_{\text{сотр}} - (\partial x_n^* / \partial Q) x_n^*$.

Видим, что $\partial x_n^* / \partial p_n < 0$, т.е. спрос на ценный товар при повышении цены уменьшается.

Рассмотрим, наконец, последнее соотношение (1.8). Поскольку $p_n > 0$ и, как выяснено, $(\partial x_n^* / \partial p_n)_{\text{сотр}} < 0$, то найдётся i-й товар, для которого $(\partial x_i^* / \partial p_n)_{\text{сотр}} > 0$, т.е. потребление i-го товара возрастет при повышении цены на n-й товар. В том случае, когда $(\partial x_i^* / \partial p_n)_{\text{сотр}} > 0$, i-й товар называется заменяющим n-й товар. Другими словами, данные товары взаимозаменяемы.

Задача 1.1. Магазин торгует гвоздями двух видов: 25 и 40 мм. Масса гвоздей соответственно 5 и 10 г. Их цена 5 и 7 р. за кг. Покупатель желает купить гвоздей на 10 р. Опишите доступные покупателю на эту сумму наборы гвоздей. Сколько и какого вида гвоздей ему купить:

– как можно меньше по совокупной массе;
– как можно больше по общей длине;
– гвоздей второго вида в два раза больше по массе, чем гвоздей первого вида.

Задача 1.2. Проверить, что неоклассическая функция полезности удовлетворяет всем свойствам таких функций.

Решение. Предельная полезность потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ для первого товара составит: $\partial u / \partial x_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta$. Очевидно, что данное выражение (как и предельная полезность второго товара) больше нуля при $\alpha > 0, \beta > 0$. Второе свойство функций полезности требует убывания предельных полезностей:

$$\partial^2 u / \partial x_1^2 = \alpha(\alpha - 1) x_1^{\alpha-2} x_2^\beta < 0.$$

При этом матрица Гессе отрицательно определена:

$$\partial^2 u / \partial X^2 = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^\beta & \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1) x_1^\alpha x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы $\Delta_1 = \alpha(\alpha-1) < 0$, $\Delta_2 = \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha^2\beta^2 =$ $= \alpha\beta[1 - (\alpha+\beta)] < 0$ при $\alpha + \beta < 1$.

Проверим третье свойство относительно первого товара:

$$\lim_{x_1 \to 0} \partial u / \partial x_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta = \frac{\alpha x_2^\beta}{x_1^{1-\alpha}} = \infty.$$

Четвёртое свойство проверим относительно второго товара:

$$\lim_{x_2 \to \infty} \partial u / \partial x_2 = \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta - 1} = \frac{\beta x_1^{\alpha}}{x_2^{1-\beta}} = 0.$$

Задача 1.3. Найти точку спроса потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$.

Для этого составим функцию Лагранжа: $L(X, \lambda) = \sqrt{x_1 x_2} + \lambda(Q - PX)$.

Точка максимума выбора потребителя определяется из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \partial u / \partial x_1 = \sqrt{x_2} / 2\sqrt{x_1} = \lambda p_1; \\ \partial u / \partial x_2 = \sqrt{x_1} / 2\sqrt{x_2} = \lambda p_2; \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q. \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе:

$$\begin{cases} x_2 / x_1 = p_1 / p_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^* = Q / (2 p_1), \\ x_2^* = Q / (2 p_2). \end{cases}$$

Задача 1.4. Какой набор товаров следует выбрать потребителю, имеющему доход в 300 денежных единиц и функцию полезности $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ при векторе цен на товары $P = (2{,}4{,}1)$.

Задача 1.5. Функция полезности потребителя имеет вид: $u(x_1, x_2) = 3 x_1^{2/3} x_2^{1/3}$. Определите максимальную полезность набора товаров при доходе потребителя в 100 денежных единиц и ценах товаров, соответственно, 5 и 10 денежных единиц. Определите норму замещения второго товара первым в оптимальной точке.

Задача 1.6. Проверить уравнение Слуцкого для потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$ относительно изменения цены второго товара.

В задаче 1.3 для потребителя с такой функцией полезности была найдена функция спроса:

$$\begin{cases} x_1^* = Q / (2 p_1), \\ x_2^* = Q / (2 p_2). \end{cases}$$

По условию задачи происходит изменение цены p_2 при компенсации (изменении) дохода. Так как $Q = PX$, то $dQ = XdP + PdX$. Второе слагаемое по следствиям из уравнения Слуцкого равно нулю и $dp_1 = 0$, поэтому изменение дохода $dQ = x_1^* dp_1 + x_2^* dp_2 = x_2^* dp_2 = Q/(2p_2)dp_2$.

Изменение точки спроса (новая точка) при изменении цены p_2 и дохода Q тогда примет следующий вид:

$$x_1^* = (Q + dQ)/(2p_1);\ x_2^* = (Q + dQ)/(2(p_2 + dp_2)).$$

С учётом выше сказанного, приращение изменения объёма второго товара в точке спроса составит:

$$dx_2^* = (Q + dQ)/(2(p_2 + dp_2)) - Q/(2p_2) = 2(p_2 dQ - Qdp_2)/(4p_2(p_2 + dp_2)) =$$
$$= (2p_2 Q/(2p_2)dp_2 - 2Qdp_2)/(4p_2(p_2 + dp_2)) = -Qdp_2/(4p_2(p_2 + dp_2)).$$

Тогда $(\partial x_2^* / \partial p_2)_{\text{сотр}} = \lim\limits_{dx_2 \to 0} dx_2 / dp_2 = -Q/(4p_2^2)$.

Найдём остальные два составляющих уравнения:

$$\partial x_2^* / \partial p_2 = -Q/(2p_2^2);\ \partial x_2^* / \partial Q = 1/(2p_2).$$

Требуется проверить равенство:

$$(\partial x_2^* / \partial p_2)_{\text{сотр}} = \partial x_2^* / \partial p_2 + (\partial x_2^* / \partial Q)x_2^*.$$

Подставив полученные выражения, получим верное равенство:

$$-Q/(4p_2^2) = -Q(2p_2^2) + (1/(2p_2))Q/(2p_2).$$

Задача 1.7. Для потребителя с функцией спроса задачи 1.3 найти в общем виде, на сколько процентов изменится спрос на первый товар при увеличении цены на второй товар на 1% при условии компенсации дохода.

Для нахождения ответа на поставленный вопрос следует воспользоваться уравнением Слуцкого:

$$(\partial x_1^* / \partial p_2)_{\text{сотр}} = \partial x_1 / \partial p_2 + (\partial x_1^* / \partial Q)x_2^* = 0 + (1/2p_1)Q/2p_2 = Q/(4p_1 p_2).$$

По условию задачи нужно найти не абсолютное, а относительное изменение спроса:

$$(\partial x_1^* / \partial p_2)_{\text{сотр}} / (x_1^* / p_2) = Q/(4p_1 p_2)/(Q/(2p_1 p_2)) = 1/2\,\%.$$

Задача 1.8. Для неоклассической функции полезности $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ составить уравнение Слуцкого и провести его анализ относительно изменения цены второго товара. Определить свойства товаров.

Функция спроса для потребителя с указанной функцией полезности составит:

$$x_1^* = (\alpha/(\alpha+\beta))Q/p_1;\ x_2^* = (\beta/(\alpha+\beta))Q/p_2 .$$

Исходя из этого, можно определить, что оба товара являются ценными, так как:

$$\partial x_1^*/\partial Q = ((\alpha/(\alpha+\beta))*1/p_1) > 0;\ \partial x_2^*/\partial Q = ((\beta/(\alpha+\beta))*1/p_2) > 0 .$$

Проверим, что выполняется следующее равенство:

$$(\partial x^*/\partial Q)P = 1 \to \alpha/((\alpha+\beta)p_1)p_1 + \beta/((\alpha+\beta)p_2)p_2 = 1 - \text{верно}.$$

Проверим равенство вида: $\sum_{j=1}^{n} p_j(\partial x_j^*/\partial p_i)_{\text{сотр}} = 0$ при n = 2 и i = 2.

$$(\partial x_1^*/\partial p_2)_{\text{сотр}} = 0 + (\alpha/(\alpha+\beta)p_1)(\beta/(\alpha+\beta))Q/p_2 = (\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2)Q/(p_1p_2) > 0;$$

$$(\partial x_2^*/\partial p_2)_{\text{сотр}} = -(\beta/(\alpha+\beta))Q/p_2^2 + (\beta/(\alpha+\beta))/p_2(\beta Q/((\alpha+\beta)p_2) =$$

$$= -(\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2)Q/(p_2^2) < 0;$$

$$p_1(\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2)Q/(p_1p_2) - p_2(\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2)Q/(p_2^2) = 0 .$$

Кроме того, видно, что товары являются взаимозаменяемыми, то есть при росте цены второго товара потребление первого товара увеличивается.

Задача 1.9. Пусть функция полезности есть $u(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2$, цены товаров равны соответственно 10 и 20, а доход 60. Пусть новая цена второго товара стала 22. На сколько должен быть скомпенсирован доход, чтобы потребитель получил набор товаров с той же полезностью.

Контрольная работа 1

Задача 1. Для потребителя с заданной функцией полезности $u(x_1, x_2)$ найти в общем виде функцию спроса на оба товара при общих ценах P и Q. Определить величину максимальной полезности при ценах P_0 и Q_0.

Задача 2. Для функции спроса, найденной в задании 1, найти в общем виде, на сколько процентов изменится спрос на первый товар при увеличении цены на второй товар на 1% при условии компенсации дохода. Определить численное значение с учётом P_0 и Q_0.

Задача 3. С учётом функции спроса, найденной в задании 1, определить, какими являются товары 1 и 2 (ценные/малоценные, взаимозаменяемые/взаимодополняемые). Проверить последние три свойства уравнения Слуцкого и его правильность при условии изменения цены второго товара.

Варианты заданий приведены в таблице 1.

1. Варианты заданий контрольной работы 1

№ варианта	Данные для первой задачи
1	$u = x_1\sqrt{x_2}$, $P_0 = (6,2)$, $Q_0 = 54$
2	$u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $P_0 = (2,4)$, $Q_0 = 12$
3	$u = x_1 + x_1x_2/2$, $P_0 = (1,2)$, $Q_0 = 12$
4	$u = x_1^2 + 2x_1x_2$, $P_0 = (4,2)$, $Q_0 = 48$
5	$u = \ln x_1 + \ln x_2$, $P_0 = (3,2)$, $Q_0 = 24$
6	$u = \sqrt{x_1}x_2$, $P_0 = (3,6)$, $Q_0 = 72$
7	$u = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$, $P_0 = (2,5)$, $Q_0 = 40$
8	$u = x_1x_2/2 + x_2$, $P_0 = (8,2)$, $Q_0 = 64$
9	$u = \sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}$, $P_0 = (6,9)$, $Q_0 = 72$
10	$u = 2x_1x_2 + x_2^2$, $P_0 = (4,6)$, $Q_0 = 48$
11	$u = x_1x_2$, $P_0 = (2,4)$, $Q_0 = 64$
12	$u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $P_0 = (1,8)$, $Q_0 = 24$
13	$u = 2x_1 + x_1x_2$, $P_0 = (2,5)$, $Q_0 = 70$
14	$u = 2x_1x_2 + x_2^2$, $P_0 = (1,2)$, $Q_0 = 18$
15	$u = 2\ln x_1 + \ln x_2$, $P_0 = (1,3)$, $Q_0 = 18$

2. МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ

2.1. Производственная функция и её свойства

Пусть пространство производственных затрат m-мерно. Каждой точке $X = (x_1, ..., x_n)$ пространства затрат соответствует единственный максимальный выпуск. Такая связь называется производственной функцией:

$$Y = f(X) \leftrightarrow (X, Y) \in \tau \text{ и если } (x, b) \in \tau \text{ и } b \geq y, \text{ то } b = y,$$

где τ – производственное множество всех возможных пар векторов затрат-выпуска (X, Y).

Производственная функция обладает следующими свойствами:

1) $\partial f / \partial x_i \geq 0$ – предельные продукты положительны (с увеличением затрат ресурсов выпуск также увеличивается);

2) $\partial f^2 / \partial x_i^2 < 0$ – по мере увеличения затрат предельный продукт уменьшается;

3) $f(0) = 0$ – выпуск при полном отсутствии затрат невозможен;

4) $f(+\infty) = +\infty$ – при бесконечном росте затрат выпуск также бесконечно растёт.

В практике часто используется конкретный вид производственной функции – функция Кобба–Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta},\ A, \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1,$$

где A – параметр нейтрального технологического прогресса; K – объём основных производственных фондов; L – объём трудовых ресурсов; α, β – эластичности выпуска соответственно по производственным фондам и по труду.

Приведём также некоторые относительные показатели:

$y = Y / L$ – средняя производительность труда;

$r = K / L$ – средняя фондовооружённость;

$k = Y / K$ – средняя фондоотдача.

2.2. Постановка задачи выбора производителя

Пусть P – вектор цен, $T = (X, Y)$ – технология производства, перерабатывающая X в Y. Тогда $PT = PX + PY$ есть прибыль от использования технологии T (компоненты вектора X отрицательны, так как представляют собой затраты ресурсов).

Задача выбора производителя принимает следующий вид: производитель выбирает технологию из своего производственного множества, стремясь максимизировать прибыль:

$$PT \to \max,\ \ T \in \tau. \tag{2.1}$$

Прибыль производителя W, являющаяся в итоге функцией X, может быть упрощённо представлена следующей функцией:

$$W(X) = vY - PX = vf(X) - PX,$$

где v – цены на продукцию; $f(X)$ – производственная функция; P – вектор цен на ресурсы.

Тогда задача 2.1 преобразовывается к следующему виду:

$$W(X) = vf(X) - PX \to \max,\ X \geq 0,\ (X, f(X)) \in \tau. \tag{2.2}$$

Приравнивая к нулю частные производные функции W, получим следующую систему уравнений:

$$v(\partial f / \partial x_j) = p_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Задача 2.1. Пусть производственная функция предприятия есть функция Кобба–Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 3%, надо увеличить основные фонды на 6% или численность основных рабочих на 9%. Один работник предприятия за месяц производит продукции на 10 000 р. Всего на предприятии работает 1000 рабочих. Имеющиеся основные производственные фонды оцениваются в 10^8 р.

Определите параметры производственной функции предприятия, среднюю фондоотдачу, среднюю фондовооружённость и среднюю производительность труда на предприятии.

Производственная функция Кобба–Дугласа в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}; \quad A, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta < 1.$$

Параметры α и β представляют собой эластичность выпуска по фондам и труду соответственно. Поэтому $\alpha = 3/6 = 1/2$, $\beta = 3/9 = 1/3$.

Для нахождения параметра уровня нейтрального технологического пространства подставим известные данные в функцию с учётом найденных коэффициентов эластичности:

$$Y = 1000 \cdot 10\,000 = A(10^8)^{1/2}(10^3)^{1/3},$$

$$A = 100.$$

Таким образом, производственная функция предприятия будет выглядеть следующим образом:

$$Y = 100K^{1/2}L^{1/3}.$$

Средняя фондоотдача определяется следующим образом:

$$k = Y / K = 10^7 / 10^8 = 1/10.$$

Задача 2.2. Уличный торговец газетами берёт их в издательстве по 5 р. за штуку. Объём продажи y связан с назначаемой продавцом ценой следующей формулой: $y = 1000 - 1000v$. Издержки самой продажи газет составляют десятую часть объёма продаж. Какое количество газет следует брать продавцу на реализацию, и по какой цене продавать для максимизации своего дохода.

Задача 2.3. В теплице ежедневно получаемый урожай огурцов зависит от числа работников и определяется по следующей формуле: $y = 4\sqrt{x} + 4\ln x$. Найти оптимальное число работников, если дневная зарплата одного работника равна доходу от продажи 2 кг огурцов.

Задача 2.4. Для предприятия с производственной функцией $Y = 100K^{1/2}L^{1/3}$ найти оптимальный размер, если период амортизации основных производственных фондов составляет 12 месяцев, а заработная плата работника 10 000 р.

Для ответа на поставленный вопрос следует воспользоваться условием максимизации выбора производителя: $v(\partial Y/\partial x_i) = p_i$. В нашем случае i = 2 (K и L). Параметр v можно принять за единицу, так как выпуск продукции Y уже измеряется в денежной форме. В условии задачи, помимо формы зависимости Y, приведены значения p_i для двух производственных ресурсов. Поэтому для определения экстремума функции двух переменных получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial Y/\partial K = 100L^{1/3}/(2K^{1/2}) = 1/12, \\ \partial Y/\partial L = 100K^{1/2}/(3L^{2/3}) = 10\ 000. \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе:

$$3L/2K = 1/(12\cdot 10^4), \quad K = 18\cdot 10^4 L;$$

$$100\cdot 100\cdot 3\sqrt{2}L^{1/2}/(3L^{2/3}) = 10\ 000;$$

$$L^{1/6} = 2^{1/2}, \ L = 8, \ K = 144\cdot 10^4.$$

Задача 2.5. Пусть цена продукции изменяется линейно относительно объёма продажи товара на рынке по следующей формуле: $v(y) = a - by$. Допустим также, что затраты фирмы зависят от объёма произведённой продукции по следующей формуле: $I(y) = cy^2 + dy + e$. Пусть с продаваемой продукции взимается акцизный налог: $G(y) = ty$. Параметры a, b, c, d, e, t являются неотрицательными константами.

Требуется найти оптимальный объём производства и соответствующую величину прибыли и издержек. Также найдите точку замирания деловой активности, т.е. ставку налога, при которой прибыль фирмы становится равной нулю. При какой ставке налога прибыль государства максимальна. Каков при этом объём продаж и прибыль фирмы.

Предприятие получает прибыль в следующем объёме:

$$P(y) = (a - by)y - cy^2 - dy - e - ty.$$

Для нахождения оптимального объёма выпуска следует найти точку максимума функции $P(y)$.

$$P'(y) = a - 2by - 2cy - d - t = 0;$$

$$y^* = (a - d - t)/(2(b + c));$$

$$P''(y) = -2b - 2c < 0.$$

Таким образом, найден объём производства, для которого доказано, что он является максимально возможным.

Налоговый доход государства определяется по следующей формуле:

$$G = t(a-d-t)/(2(b+c)),\ G'(t) = (a-d-t)/(2(b+c)) - t/(2(b+c)) = 0;$$

$$t^* = (a-d)/2,\ G^* = (a-d)^2/(8(b+c));$$

$$y^* = (a-d-t)/(2(b+c)) = (a-d)/(4(b+c));$$

$$P(y^*) = (a-by)y - cy^2 - dy - e - ty = -y^2(b+c) + y(a-d-(a-d)/2) - e =$$
$$= -(a-d)^2/(16(b+c)) + (a-d)^2/(8(b+c)) - e = (a-d)^2/(16(b+c)) - e,$$

$$P(y^*(e)) = -(a-d-t)^2/(4(b+c)) + (a-d-t)^2/(2(b+c)) - e =$$
$$= (a-d-t)^2/(4(b+c)) - e.$$

Данное выражение равно нулю при $\tilde{t} = a - d - \sqrt{4(b+c)e}$.

Контрольная работа 2

Задача 1. Пусть производственная функция есть функция Кобба–Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на a%, надо либо увеличить основные производственные фонды на b%, либо численность работников на c%. Один работник в месяц производит продукции на M у.е., а всего работников L. Основные фонды оцениваются в K у.е. Найдите параметры производственной функции (A, α, β) и определите величины средней фондовооружённости, средней фондоотдачи и средней производительности труда.

Задача 2. Для предприятия с производственной функции из задания 1 определите оптимальный размер (K, L), если период полной амортизации производственных фондов N месяцев, а зарплата одного работника в месяц Q у.е.

Задача 3. Объём сбыта зависит от назначаемой цены v по заданной формуле $Y(v)$. Пусть, также, объём сбыта равен объёму выпуска продукции. Зависимость производственных издержек I от объёма Y выпуска продукции задана формулой $I(Y)$. Найти объём выпуска, цену и издержки производства, при которых прибыль предприятия максимальна. Пусть с каждой единицы продаваемой продукции взимается налог: $G(Y) = tY$. Определите при какой ставке налога прибыль предприятия станет равной нулю.

Варианты заданий приведены в таблице 2.

2. Варианты заданий контрольной работы 2

№ варианта	1 задача	2 задача	3 задача
1	2	3	4
1	$a=1, b=2, c=3;$ $M=10^3; L=10^3; K=10^5$	$N=5;$ $Q=10^3$	$Y=11-v;$ $I(Y)=Y^2-5Y+11$
2	$a=1, b=3, c=2;$ $M=10^4; L=5^3; K=10^6$	$N=5;$ $Q=10^2$	$Y=10-v;$ $I(Y)=Y^3/3-5Y^2+17Y+12$
3	$a=1, b=3, c=3;$ $M=10^4; L=10^3; K=10^6$	$N=3;$ $Q=10$	$Y=8-v;$ $I(Y)=Y^3/3-3Y^2+11Y-10$
4	$a=1, b=2, c=4;$ $M=10^4; L=5^3; K=10^5$	$N=2;$ $Q=10^3$	$Y=30-v;$ $I(Y)=Y^2-6Y$
5	$a=2, b=5, c=5;$ $M=10^4; L=2^5; K=10^7$	$N=2;$ $Q=10^2$	$Y=40-2v;$ $I(Y)=Y^2+2Y+7$
6	$a=2, b=5, c=4;$ $M=10^3; L=10^4; K=10^7$	$N=4;$ $Q=10$	$Y=30-v;$ $I(Y)=Y^3/3-7Y^2+41Y+2$
7	$a=3, b=6, c=9;$ $M=10^3; L=10^3; K=10^9$	$N=12;$ $Q=10^3$	$Y=80-v;$ $I(Y)=Y^2+20Y+3$
8	$a=2, b=4, c=6;$ $M=10^4; L=10^3; K=10^{11}$	$N=18;$ $Q=10^4$	$Y=128-2v;$ $I(Y)=2Y^2+4Y+2$
9	$a=1, b=2, c=3;$ $M=10^3; L=10^3; K=10^7$	$N=6;$ $Q=10^3$	$Y=40-v;$ $I(Y)=Y^3-10Y^2+55Y+1$
10	$a=2, b=4, c=6;$ $M=10^3; L=10^3; K=10^3$	$N=12;$ $Q=10^3$	$Y=128-2v;$ $I(Y)=Y^3-13Y^2+121Y+4$
11	$a=2, b=6, c=6;$ $M=10^3; L=10^3; K=10^6$	$N=6;$ $Q=10^3$	$Y=100-6v;$ $I(Y)=4Y^2$
12	$a=1, b=3, c=2;$ $M=10^3; L=10^2; K=10^5$	$N=6;$ $Q=10^3$	$Y=40-v;$ $I(Y)=Y^3/3-3Y^2/2+34Y-17$
13	$a=1, b=3, c=2;$ $M=10^3; L=60; K=10^6$	$N=4;$ $Q=10^3$	$Y=128-2v;$ $I(Y)=2Y^2+4Y+2$

Продолжение табл. 2

1	2	3	4
14	$a=3, b=8, c=8;$ $M=10^4; L=10^2; K=10^5$	$N=12;$ $Q=10^4$	$Y=2-v/4;$ $I(Y)=7Y^2-8Y+2$
15	$a=2, b=5, c=4;$ $M=10^4; L=20; K=10^5$	$N=8;$ $Q=10^4$	$Y=22-2v;$ $I(Y)=2Y^2-7Y+15$

3. МАКРОЭКОНОМИКА

3.1. Статические модели макроэкономики

3.1.1. Модель Леонтьева (межотраслевого баланса)

Идея межотраслевого баланса впервые была сформулирована в работах советских экономистов в 1920-х гг. и получила затем развитие в трудах американского экономиста В.В. Леонтьева.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. Чистая отрасль – это условное понятие – некоторая часть народного хозяйства, более или менее цельная. Например, энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.п.

Пусть $\tilde{a}_{ij}$ количество продукции i-й отрасли, расходуемое в j-й отрасли, V_i – объём производства i-й отрасли, c_i – объём потребления продукции i-й отрасли в непроизводственной сфере. Ясно, что $c_i = V_i - \sum_j \tilde{a}_{ij}$.

Матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ содержит весьма много информации. Так, её i-я строка характеризует использование продукции i-й отрасли по всему народному хозяйству, а j-й столбец характеризует j-ю отрасль: что и в каких количествах она использует.

Перейдём теперь к безразмерным величинам. Пусть $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}/V_i$ – количество единиц продукции i-й отрасли, расходуемое на изготовление, производство одной единицы продукции j-й отрасли. Числа a_{ij}, называются коэффициентами прямых затрат j-й отрасли и характеризуют технологию этой отрасли. Число же c_i/V_i есть доля продукции i-й отрасли, идущая на непроизводственное потребление.

Для дальнейшего рассмотрения модели Леонтьева сделаем два важных предположения. Первое состоит в том, что сложившуюся технологию производства считаем неизменной. Таким образом, матрица $A = (a_{ij})$ постоянна. Второе состоит в постулировании свойства линейности существующих технологий, т.е. для выпуска j-й отраслью продукции объёма x требуется ресурсов (т.е. продукции других отраслей) в количестве $x\sum_j a_{ij}$.

Это требование означает, в частности, что каждая отрасль способна произвести любой объём своей продукции при условии, что ей будут обеспечены ресурсы в необходимом количестве. На самом деле это, конечно, не так, так как производственные возможности всякой отрасли ограничены имеющимся объёмом трудовых ресурсов и основных фондов.

Есть много общего в рассматриваемой ситуации с задачей оптимального планирования или оптимального использования ресурсов.

В частности, пусть $X = (x_i)$ – вектор объёмов производства в отраслях, тогда AX – потребляемые объёмы продукции этих отраслей. Таким образом, вне производственной сферы на потребление остаётся только $X - AX$.

В дальнейшем, исходя из экономического смысла, матрицу, задающую модель Леонтьева, считаем неотрицательной.

3.1.2. Продуктивность модели Леонтьева

Пусть потребность непроизводственной сферы выражается, вектором C. Существует ли вектор производства, обеспечивающий это, т.е. удовлетворяющий уравнению $C = X - AX$. Разумеется, учитывая экономическую интерпретацию, этот вектор производства должен быть неотрицательным. Поэтому говорят, что модель Леонтьева продуктивна, если уравнение $X - AX = C$ имеет неотрицательное решение для любого $C > 0$, т.е. матрица A позволяет произвести любой неотрицательный вектор потребления.

Теорема. Модель Леонтьева с матрицей A продуктивна, если и только если существует неотрицательная матрица, обратная к $(E - A)$.

В самом деле, пусть матрица $(E - A)^{-1}$ неотрицательна, тогда $X = (E - A)^{-1}C$ и, поскольку $C > 0$, то и $X > 0$. Доказательство обратного (т.е. если модель продуктивна, то матрица $(E - A)$ имеет обратную неотрицательную матрицу) опустим.

Только что указанный критерий продуктивности модели Леонтьева не имеет хорошей экономической интерпретации. Рассмотрим ещё один критерий продуктивности.

Пусть модель Леонтьева задана матрицей A размерами $n \times n$. Обозначим через N множество $\{1, ..., n\}$. Пусть $S \subseteq N$. Говорят, что подмножество S изолировано, если $a_{ij} = 0$, всякий раз, когда $j \in S$, $i \in N / S$. Понятие изолированности подмножества S допускает прозрачную экономическую интерпретацию: отрасли, номера которых принадлежат S, не используют товары, производимые в отраслях с номерами, не принадлежащими S.

Матрица называется *неразложимой*, если в ней нет изолированных подмножеств, кроме N и $\emptyset$. Понятие неразложимости также имеет прозрачный экономический смысл; любая отрасль использует, хотя бы косвенно, продукцию всех отраслей. Ведь если $a_{ij} \neq 0$, то j-я отрасль непосредственно использует продукцию i-й отрасли. Но если даже $a_{ij} = 0$, т.е. j-я отрасль не использует продукцию i-й отрасли непосредственно, всё равно при неразложимой матрице от данной отрасли до любой другой можно найти цепочку отраслей, использующих продукцию друг друга.

Для неразложимых матриц условие продуктивности выглядит так: если сумма элементов каждой строки не больше единицы и хотя бы для одной строки строго меньше единицы, то модель Леонтьева с этой матрицей продуктивна.

Для продуктивности действительно есть основания: продукции каждой отрасли хватает для нужд самого производства, более того, есть отрасль, продукция которой даже остаётся на потребление, а неразложимость, т.е. взаимосвязанность всех отраслей, позволяет надеяться на то, что этот остаток может преобразоваться в остатки на потребление и продукции других отраслей.

3.1.3. Прямые и полные затраты в модели Леонтьева

Пусть $X = (x_i)$ обозначает вектор нового производства, тогда AX есть израсходованные в процессе производства ресурсы и для непроизводственной сферы остаётся $C = X - AX$, но на производство C надо израсходовать AC ресурсов. Однако на их производство надо в свою очередь затратить $A(AC) = A^2C$ ресурсов, а для их производства ещё израсходовать $A(A^2C) = A^3C$ и т.д. Полные затраты, таким образом, есть сумма бесконечного ряда $\sum_{n\to 0}^{\infty} A^n C$.

Но члены этого ряда – конечномерные векторы-столбцы, поэтому сумма этого ряда находится как вектор сумм 1-х, 2-х и т.д. компонентов вектора $A^n C$. Однако можно доказать, что если сумма ряда $\sum_{n\to 0}^{\infty} A^n C$ существует, то её можно вычислить как произведение $(E - A)^{-1} C$, т.е.

$$\sum_{n\to 0}^{\infty} A^n C = (E - A)^{-1} C . \qquad (3.1)$$

Обратите внимание на аналогию с формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b + bq + bq^2 + ... = \sum_{n\to 0}^{\infty} bq^n = b/(1-q)$. Но эта формула верна, если только если $|q| < 1$. Нечто подобное имеет место и для формулы (3.1).

Для матрицы A число λ называется собственным числом, если найдётся ненулевой вектор γ такой, что $A\gamma = \lambda\gamma$. Такой вектор также называется собственным вектором, отвечающим данному собственному числу.

Можно доказать следующее утверждение: модель Леонтьева с матрицей A продуктивна, если и только если матрица имеет собственное число $\lambda_A < 1$, которое к тому же является наибольшим по модулю из всех собственных чисел матрицы.

Если матрица имеет такое число λ_A, то можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ и формула (1) верна.

Задача 3.1. Для экономики, описываемой моделью Леонтьева с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, найти объём производства, обеспечивающий вектор конечного непроизводственного потребления $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Экономика, представленная данной матрицей, является продуктивной, так как сумма элементов каждой строки матрицы не превышает единицы. Более того, является в обоих случаях меньше единицы. Поэтому можно найти неотрицательный вектор производства X.

Для его нахождения следует найти матицу $(E-A)^{-1}$. Воспользуемся для этого методом миноров.

$$(E-A) \to (E-A)^T \to (E-A)^{T,AD} \to (E-A)^{T,AD}/\det(E-A)$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$(E-A)_{ij}^{T,AD} = (-1)^{i+j} \det(E-A)^T$ без i и j. $\det(E-A) = 1/4 - 1/12 = 1/6$.

$$X = (E-A)^{-1}C = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.2. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ найти собственные числа и проверить условие продуктивности.

Собственные числа матрицы λ находятся из следующего уравнения: $AY = \lambda Y \to (A - \lambda E)Y = 0$, где Y – собственный вектор матрицы.

$$\begin{cases} (1/2-\lambda)y_1 + 1/3 y_2 = 0, \\ 1/6 y_1 + (1/3-\lambda)y_2 = 0. \end{cases}$$

Получившаяся однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю:

$$(1/2-\lambda)(1/3-\lambda) - 1/18 = 0.$$

Откуда $\lambda_1 = 1/6, \lambda_2 = 2/3$. Каждое из полученных чисел по модулю меньше 1. Следовательно, матрица A продуктивна.

Задача 3.3. Определить какие из нижеприведённых матриц неразложимы. Для неразложимых матриц проверить условие продуктивности.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 2/3 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

3.2. Динамические модели макроэкономики

3.2.1. Модель Неймана

Рассмотрим экономику, описываемую парой (С, K), где С – пространство товаров; K – множество производственных процессов, перерабатывающих некоторые количества товаров в другие количества тех же товаров. При этом, под товаром (продуктом) будем понимать как первичные факторы производства (земля, труд), сырьё (нефть, уголь), так и конечные продукты производства, услуги и т.п.

Пусть товаров всего n, тогда C есть неотрицательный ортант n-мерного пространства. Множество K производственных процессов имеет в своей основе конечное число процессов $(Q_1, ..., Q_m)$, которые называются *базисными*. Каждый базисный процесс представляет собой пару векторов $Q_j = (A_j, B_j)$ из C. (Векторы A_j, B_j – это векторы-столбцы, но в целях экономии места будем записывать их строками.) Содержательный смысл процесса Q_j таков: он затрачивает вектор $A_j = (a_{ij})$ и выпускает вектор $B_j = (b_{ij})$, т.е. перерабатывает вектор A_j в вектор B_j. По смыслу все векторы A_j, B_j неотрицательны. Обозначив $A = (A_1, ..., A_m)$, $B = (B_1, ..., B_m)$, получаем, что технология нашей модели задаётся парой неотрицательных матриц A, B; матрица A называется *матрицей затрат*, B – *матрицей выпуска*. Комбинируя базисные процессы, можно получить новые процессы. Так, возьмём неотрицательные числа z_i, $i = 1, ..., m$ и определим новый производственный процесс $z_1Q_1 + \ldots + z_mQ_m$, в котором затраты есть вектор $\sum_{j=1}^{m} z_j A_j$, а выпуск есть вектор $\sum_{j=1}^{m} z_j B_j$; полученный производственный процесс кратко обозначим через (AZ, BZ). Вектор-столбец $Z = (z_j)$ называется вектором *интенсивностей*. Получившееся более широкое множество процессов обозначим K.

Можно заметить, что в то время, как базисные процессы $Q_1, \ldots, Q_m$ соответствуют, вообще говоря, реальным отраслям, заводам, фабрикам, каждый элемент $(X, Y) \in K$ есть некоторый процесс, описывающий определённый режим совместной работы этих отраслей, заводов, фабрик. При этом X есть вектор затрат, Y – вектор выпуска.

Рассмотренная ранее модель Леонтьева действительно есть частный случай модели Неймана при $n = m$, $B = E$. Основное отличие модели Неймана состоит в том, что всякий базисный процесс может выпускать не один товар. Ясно также, что модель Неймана линейна.

Перейдём теперь к описанию динамики модели Неймана. Рассмотрим T периодов времени, например, лет. В каждый t-й период для производства продукции применяется один из процессов множества K, характеризующийся вектором интенсивностей $Z^{(t)}$.

3.2.2. Замкнутость модели Неймана

Кроме линейности, предположим ещё, что модель Неймана замкнута. Это означает, что для производства в $(t + 1)$-й период можно тратить лишь те товары, которые были произведены в предыдущий t-й период. Поскольку выпуск в t-й период равен $BZ^{(t)}$, а затраты в $(t + 1)$-й период равны $AZ^{(t+1)}$, то математически предположение о замкнутости модели Неймана записывается в виде серии неравенств

$$AZ^{(1)} \le S$$
$$\vdots$$
$$AZ^{(t+1)} \le BZ^{(t)}, t = 1, ..., T-1.$$

Вектор S представляет собой вектор запасов, имеющихся к началу всего планового периода $[0, T]$. Последовательность векторов $Z^{(1)}, ..., Z^{(t)}$, удовлетворяющих указанным выше неравенствам будем называть (допустимым) планом с началом S и обозначать $\{Z^t\}$.

3.2.3. Правило нулевого дохода и его трактовка

При исследовании планов в модели Неймана оказывается полезным ввести понятие цен на товары.

Пусть $p^i_{(t)}$ – цена единицы i-го товара в t-й период. Соответствующий вектор цен $P_{\{t\}}$ есть вектор-строка. Величина $P_{(t+1)}B_j - P_{(t)}A_j$ выражает доход процесса Q_j за t-й период. Таким образом, в начале t-го периода на закупку сырья в количестве A_j тратятся средства по ценам $P_{(t)}$ данного периода, затем произведённая продукция B_j продаётся уже по ценам $P_{(t+1)}$ следующего периода. Конечно, векторы цен неотрицательны. Основное предположение относительно цен при исследовании модели Неймана состоит в следующем: никакой из процессов не приносит положительного дохода:

$$P_{(t+1)}B_j - P_{(t)}A_j \le 0, \quad j = 1, ..., m; \quad t = 1, ..., T-1 \tag{3.2}$$

или $P_{(t)}A \ge P_{(t+1)}B$, $t = 1, ..., T-1$.

Условие (3.2) часто называют *правилом нулевого дохода*. На первый взгляд, оно выглядит парадоксально, особенно если отнести его к капиталистической экономике. В самом деле, какой смысл капиталисту осуществлять производство, если оно бесприбыльно? Однако этот парадокс кажущийся. Дело в том, что величины дохода $P_{(t+1)}B_j - P_{(t)}A_j$ j-го процесса относятся к разным моментам времени. Допустим, что владелец фирмы обладает капиталом R в начале t-го периода. На эту сумму он закупает сырьё, производит товары и продаёт их. При нулевом доходе он снова имеет капитал R. Однако цены могут стать другими, например, ниже. Тогда та же сумма R будет обладать большей покупательной способностью. В модели Неймана дело обстоит именно так.

Можно было считать, что прибыль каждого процесса ограничена сверху одним и тем же числом, общим для всех отраслей. Но это и есть основное содержание правила нулевого дохода: максимально возможная прибыль во всех отраслях одинакова. При такой трактовке правило нулевого дохода есть лишь иная форма знаменитой гипотезы Адама Смита о тенденции выравнивания нормы прибыли в разных отраслях народного хозяйства при его нормальном функционировании.

3.2.4. Стационарные траектории в модели Неймана

Вернёмся к ценам. Их последовательность $P_{(t)}$, $t = 1, ..., T$, удовлетворяющую системе неравенств (3.2), будем называть *траекторией цен* и обозначать $\{P_t\}$. Теперь запишем явно предположение, что общая масса денег не меняется и постоянно находится в обращении:

$$P_{(t)}AZ^{(t)} = P_{(t+1)}BZ^{(t)},\ \ t = 1, \ldots, T-1, \tag{3.3}$$

т.е. продукции продаётся ровно на столько, на сколько было куплено сырья (напомним, что продукция, произведённая в t-м периоде, продаётся по ценам следующего (t + 1)-го периода), а вся выручка от продажи продукции идёт на приобретение сырья в следующем периоде:

$$P_{(t+1)}BZ^{(t)} = P_{(t+1)}AZ^{(t+1)},\ \ \ t = 1, \ldots, T-1. \tag{3.4}$$

Важную роль при изучении траекторий интенсивностей $\{Z^t\}$ и цен $\{P_t\}$ играют самые простые из возможных динамических траекторий, так называемые *стационарные*.

Траектория интенсивностей $\{Z^t\}$ называется стационарной, если существует такое число $v > 0$, что $Z^{(t+1)} = vZ^{(t)}$. Будем обозначать её $\{v, Z\}$, где $Z = Z^{(1)}$.

Смысл стационарной траектории очень прост: интенсивность следующего периода в одно и то же число раз или на одно и то же число процентов больше интенсивности данного периода.

Для того чтобы последовательность $Z^{(t)} = v^{t-1}Z^{(1)}$ была стационарной траекторией интенсивностей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $vAZ < BZ$.

Далее, назовём траекторию цен $\{P_t\}$ стационарной, если существует такое число $\mu > 0$, что $\mu P_{(t+1)} = P_{(t)}$. Будем обозначать её $\{P, \mu\}$.

Как и в случае стационарных траекторий интенсивностей, можно убедиться, что последовательность цен $P_{(t)} = P/\mu^{t-1}$ будет стационарной траекторией цен тогда и только тогда, когда $\mu PA \le PB$.

Смысл стационарной траектории очень прост: цены падают от периода к периоду в одно и то же число раз или на одно и то же число процентов.

Для стационарных траекторий интенсивностей $\{v, Z\}$ и цен $\{P, \mu\}$ равенства (2) и (3), выражающие предположение о неизменности общей массы денег и то, что они находятся все в обращении, принимают соответственно вид $\mu PAZ = PBZ$ и $vPAZ = PBZ$.

Задача 3.4. Пусть экономика описывается двумя базисными технологическими процессами: $Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вектор интенсивностей использования данных процессов $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Найти векторы затрат и выпуска для данного вектора Z.

Матрицы затрат и выпуска для базисных процессов составят: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Применив вектор интенсивностей использования базисных процессов, получим векторы затрат и выпуска соответственно $AZ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ и $BZ = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Задача 3.5. Пусть матрицы технологических процессов есть $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$, вектор цен $P = (1; 5)$, начальные запасы составляют $S = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix}$. Найти по модели Неймана вектор Z интенсивностей использования технологических процессов за один производственный цикл, максимизирующий стоимость выпуска.

Целевая функция максимума выпуска определяется из следующего выражения:

$$Q = PBZ = (1;\ 5) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 30z_1 + 80z_2 \to \max .$$

При этом должны выполняться следующие ограничения:

$$\begin{cases} AZ \le S \\ Z \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} 5z_1 + 2z_2 \le 14; \\ 4z_1 + 10z_2 \le 28; \\ z_1, z_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приведём систему к каноническому виду:

$$\begin{cases} 5z_1 + 2z_2 + z_3 = 14, \\ 4z_1 + 10z_2 + z_4 = 28. \end{cases}$$

Решим задачу линейного программирования табличным симплекс-методом.

	z_1	z_2	z_3	z_4		
	14	28	0	0	S	Q
z_3	5	2	1	0	30	0
z_4	4	$\underline{10}$	0	1	80	0
Δ	–14	–28	0	0	0	

Минимальное отрицательное число последней строке находится в столбце z_2, поэтому переменную z_2 вводим в базис.

$\arg\min(S/z_2) = \arg\min\begin{pmatrix} 30/2 \\ 80/10 \end{pmatrix} = z_4$, т.е. данную переменную выводим из базиса.

Разрешающий элемент находится на пересечении столбца z_2 и строки z_4.

	z_1	z_2	z_3	z_4		
	14	28	0	0	S	Q
z_3	5 – 2 · 0,4 = = $\underline{4,2}$	2 – 2 · 1 = 0	1– 2 · 0 = 1	0 – 2 · 0,1 = = –0,2	30 – 2 · 8 = = 14	0
z_2	0,4	1	0	0,1	8	28
Δ	4,2 · 0 + + 0,4 · 28 – – 14 = –2,8	0	0	2,8	224	

Переменную z_1 вводим в базис.

$$\arg\min(S / z_1) = \arg\min\begin{pmatrix} 14/4{,}2 \\ 8/0{,}4 \end{pmatrix} = z_3 .$$

	z_1	z_2	z_3	z_4		
	14	28	0	0	S	Q
z_1	1	0	1/4,2 ≈ 0,238	–0,2/4,2 ≈ ≈ –0,048	14/4,2 ≈ 3,333	14
z_2	0,4 – – 0,4 · 1 = = 0	1 – – 0,4 · 0 = = 1	0 – 0,4 × × 0,238 ≈ ≈ –0,095	0,1 – 0,4 × × (–0,048) ≈ ≈ 0,081	8 –0,4 · 3,33 ≈ ≈ 6,667	28
Δ	1 · 14 + + 0 · 28 – – 14 = 0	0	0,238 · 14 – –0,095 · 28 ≈ ≈ 0,672	–0,048 · 14 + + 0,081 · 28 ≈ ≈ 1,596	3,333 · 14 + + 6,667 · 28 ≈ ≈ 233,338	

Таким образом, оптимальным будет вектор $Z = \begin{pmatrix} 3{,}333 \\ 6{,}667 \end{pmatrix}$ при максимальном выпуске $Q = 233{,}338$.

Контрольная работа 3

Задача 1. Даны вектор C конечного непроизводственного потребления и матрица A коэффициентов прямых затрат отраслей экономики. Найти вектор валового выпуска, обеспечивающий данный вектор потребления. Определить продуктивность экономики, заданной матрицей A с использованием её собственных чисел.

Задача 2. Даны матрицы A, B базисных технологических процессов, вектор цен P и вектор начальных запасов S. Найти Z – вектор интенсивностей использования базисных технологических процессов, максимизирующий Q – стоимость выпуска такой экономики за один производственный цикл. Решение найти с помощью симплекс-метода линейного программирования и проиллюстрировать графическим способом.

Задача 3. В модели Солоу с производственной функцией Кобба–Дугласа с заданными параметрами $A, \alpha, \beta = 1 - \alpha$ найти значения фондовооружённости, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории, на которой норма накопления равна 0,2, выбытие фондов 0,2, а темп прироста трудовых ресурсов в год 0,05.

Варианты заданий приведены в таблице 3.

3. Варианты заданий контрольной работы 3

№ варианта	1 задача	2 задача	3 задача
1	$C=\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}2/5 & 1/5\\1/8 & 1/4\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\4 & 10\end{pmatrix}$; $P=(1{,}1)$ $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\10 & 15\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}14\\28\end{pmatrix}$	$A=10,\ \alpha=1/2$
2	$C=\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1/3 & 1/4\\1/3 & 1/4\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\4 & 10\end{pmatrix}$; $P=(1{,}5)$ $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\5 & 15\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}14\\28\end{pmatrix}$	$A=10^3,\ \alpha=1/2$
3	$C=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1/3 & 1/6\\1/2 & 1/4\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}7 & 5\\12 & 12\end{pmatrix}$; $P=(1{,}2)$ $B=\begin{pmatrix}10 & 6\\10 & 2\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}22\\18\end{pmatrix}$	$A=10^3,\ \alpha=1/3$
4	$C=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\1/4 & 1/4\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$; $P=(2{,}6)$ $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}30\\30\end{pmatrix}$	$A=10^2,\ \alpha=1/3$
5	$C=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}2/5 & 1/5\\1/3 & 1/3\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$; $P=(2{,}3)$ $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 4\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$	$A=10,\ \alpha=1/3$
6	$C=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/8\\1/5 & 2/5\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$; $P=(2{,}3)$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$	$A=10,\ \alpha=1/4$
7	$C=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/3\\1/4 & 1/3\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\10 & 4\end{pmatrix}$; $P=(1{,}1)$ $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\15 & 10\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}20\\20\end{pmatrix}$	$A=10^2,\ \alpha=1/4$
8	$C=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/2\\1/6 & 1/3\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\10 & 4\end{pmatrix}$; $P=(1{,}5)$ $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\15 & 5\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}14\\28\end{pmatrix}$	$A=10^2,\ \alpha=1/2$

Продолжение табл. 3

№ варианта	1 задача	2 задача	3 задача
9	$C=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4\\1/4 & 1/2\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}5 & 7\\12 & 12\end{pmatrix}$; $P=(1,2)$ $B=\begin{pmatrix}6 & 10\\2 & 10\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}30\\30\end{pmatrix}$	$A=10^4$, $\alpha=1/4$
10	$C=\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\1/5 & 2/5\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$; $P=(2,6)$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}22\\18\end{pmatrix}$	$A=10^3$, $\alpha=1/4$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Бутко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; под ред. Н.Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи: ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
2. Колемаев, В.А. Математическая экономика : учебник для вузов / В.А. Колемаев. – 3-е изд., стер. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 399 с.
3. Колемаев, В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем : учебник для вузов / В.А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 295 с.
4. Красс, М.С. Математика в экономике. Основы математики : учебник для вузов / М.С. Красс. – М. : ИДФБК-ПРЕСС, 2005. – 472 с.
5. Кундышева, Е.С. Экономико-математическое моделирование : учебник для вузов / Е.С. Кундышева ; под науч. ред. Б.А. Суслакова. – М. : ИТК «Дашков и К», 2008. – 424 с.
6. Лебедев, В.В. Математическое и компьютерное моделирование экономики : учебное пособие для вузов / В.В. Лебедев, К.В. Лебедев. – М. : НВТ-Дизайн, 2002. – 256 с.
7. Малыхин, В.И. Математическое моделирование экономики : учебно-практ. пособие для вузов / В.И. Малыхин. – М. : УРАО, 1998. – 160 с.