***ТЕМА:* ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

 МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Матрицы и действия над ними.

*ОПР.* *Матрицей* называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из **m** строк и **n** столбцов

 

Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита (А, В, С, …), элементы матрицы – строчными буквами с двойной индексацией: аij – элемент матрицы, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

*ОПР.* Две матрицы А и В одной размерности называются *равными*, если они совпадают поэлементарно, т.е. аij = bij для любых i = 1…m, j = 1…n.

# 2. Виды матриц

1. *Вектор-строка* – матрица, состоящая из одной строки. А = (а1 а2 а3 … аn)
2. *Вектор-столбец.*
3. *Квадратная* – матрица, у которой число строк равно числу столбцов.

Квадратная матрица размера n/n называется матрицей n-го порядка.

*ОПР.* Элементы матрицы, у которых номер столбца равен номеру строки (i=j), называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы.

1. *Диагональная* – квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю.
2. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается буквой Е.
3. *Нулевая* – матрица, у которой все элементы равны нулю. Обозначается буквой О.

## **3. Действия над матрицами**

1. *Сложение.* Суммой двух матриц А и В одинакового размера называется матрица С, элементы которой сij = aij+bij. Аналогично определяется разность матриц.
2. *Умножение на число.* Произведением матрицы А на число k называется матрица В такая, что bij=kaij.
3. *Умножение.* Умножение матриц определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц А и В называется такая матрица С , каждый элемент которой сij равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В:

cij = ai1b1j + ai2b2j + …. + aikbkj

  

В общем случае АВ # ВА.

1. *Транспонирование* – переход от матрицы А к матрице Ат, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка элементов.

4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

*ОПР.* Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется число, равное алгебраической сумме n членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.

Обозначается: ׀А׀ , ∆, det(A)

Вычисление определителя второго порядка:



Вычисление определителя третьего порядка:



Правило треугольников (правило Саррюса):



«+» означает, что берем тот знак, который получается!!!

«-» означает, что полученный знак меняем на противоположный!!!

Пример: $\left|\begin{matrix}3&4&1\\0&2&5\\-1&0&-2\end{matrix}\right|=3\*2\*\left(-2\right)+4\*5\*\left(-1\right)+0\*0\*1--\left(-1\*2\*1+0\*4\*\left(-2\right)+0\*5\*3\right)=-12-20+0+2+0+0=-32$

Чтобы удобнее было выбирать числа можете две первые строки приписать снизу (или два первых столбца приписать справа) от определителя, тогда нужные числа окажутся на параллелях главной (первые тройки чисел) или второй диагонали (тройки чисел,у которых нужно будет менять знаки).

**Свойства определителей**

1. Если матрица содержит нулевую строку или столбец, то ее определитель равен нулю.
2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на k, то ее определитель умножится на это число.
3. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется.
4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
5. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы равны или пропорциональны, то ее определитель равен нулю.
6. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки, предварительно умноженные на одно и тоже число.

**7. Ранг матрицы**

*ОПР.* *Рангом* матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Обозначается r(A).

**Пример.**



# **СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

# **Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:**

# **, где аij – коэффициенты при переменных**


#  **bi – свободные члены**

# **(1)**

# ***Решением* системы называется такая совокупность n чисел (x1 = k1, x2 = k2,… xn = kn), при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.**

# ***Совместная* система уравнений имеет хотя бы одно решение. Несовместная – не имеет решений.**

# **Система называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной,* если решений бесконечное множество.**

# **Формулы Крамера**

Метод Крамера состоит в том, что мы последовательно находим *определитель матрицы системы* (1), т.е.  = det (aij) и *n вспомогательных определителей* i (i=), которые получаются из определителя  заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы Крамера имеют вид:

x i =  i / . (2)

Из (2) следует правило Крамера, которое дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы (1): если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

Если главный определитель системы  и все вспомогательные определители i = 0 (i= ), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы  = 0, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

**Пример 1**. Решить методом Крамера систему уравнений:

x1 - x2 +  x3 = 3,

2x1 + x2 + x3 = 11

x1 + x2 + 2x3 = 8

*Решение.* Главный определитель этой системы 

значит, система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители  i ( i =1,3), получающиеся из определителя  путем замены в нем столбца, состоящего из коэффициентов при xi, столбцом из свободных членов:

  

Главный определитель составляется из коэффициентов при неизвестных, для получения вспомогательных определителей- в главном определителе последовательно заменяем столбцы определителя на столбец чисел, стоящих в правой части системы(столбец свободных членов).

# Отсюда x1 =  1/ = 4, x2 =  2/ = 2, x3 =  3/ = 1, решение системы - вектор С=(4, 2, 1)T.

# **Самостоятельно:**

#  (1, 1, 1) ∆=33  (-1, 0, 1) ∆=14

**Метод Гаусса.**

Исторически первым, наиболее распространенным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной.

**Пример 2.** Решить систему уравнений методом Гаусса:

x +  y - 3z = 2,

3x - 2y +  z = - 1,

2x +  y - 2z = 0.

Решение: Первое уравнение достаточно простое (есть единичные коэффициенты), поэтому его принимаем за ведущее и оно будет оставаться неизменным). Из второго и третьего уравнений исключаем какую-нибудь переменную (например х). Для этого умножим первое уравнение на -3и прибавим ко второму, затем первое уравнение умножаем на -2 и прибавляем к третьему.

$\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x+y-3z=2 \*(-3)}{3x-2y+z=-1}\right.$ получаем

$\left|\genfrac{}{}{0pt}{}{-3x-3y+9z=-6}{3x-2y+z=-1}\right.$ складываем,

0\*x-5y+10z=-7, аналогично

$x+y-3z=2 \*(-$2)

$\left|\genfrac{}{}{0pt}{}{-2x-2y+6z=-4}{2x+y-2z=0}\right.$ складываем -y+4z=-4

система примет вид

$\left\{\begin{array}{c}x+y-3z=2\\-5y+10z=-7\\-y+4z= -4\end{array}\right.$ то есть в двух уравнениях осталось по две переменных, исключаем еще одну (например у). Третье уравнение (оно попроще) умножим на -5 и прибавим ко второму

- 5y+10z= -7

5y-20z =20 складывем эти уравнения, получим новую равносильную систему

$$\left\{\begin{array}{c}x+y-3z=2\\-y+4z=-4\\-10z=13\end{array}\right.$$

Уравнения в системе можно менять местами. Из третьего уравнения легко находится

Z=-1,3, подставляя найденное значение во второе уравнение, получим –у+4\*(-1,3)=-4, откуда у= -1,2, далее, подставляя найденные значения в первое уравнение, найдем х

Х - 1,2 - 3\*(-1,3) = 2. Откуда х = - 0,7

Ответ: (-0,7; -1,2; - 1,3)

# **Самостоятельно:**

#  (1, 1, 1) ∆=33  (-1, 0, 1) ∆=14